Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

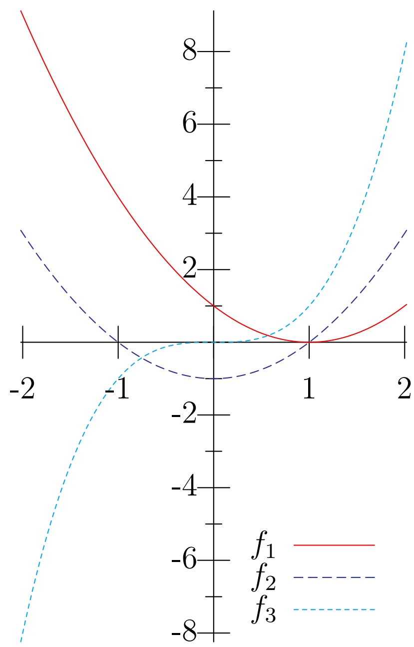
WiSe 2014/15
Blatt 2
10.11-21.11.2014

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 1

Lösungen

Aufgabe 1

$$f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \text{“gerade”}$$
$$f(-x) = -f(x) \quad \Longrightarrow \quad \text{“ungerade”}$$



1. $f_1(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \neq f_1(x)$
   $\Longrightarrow$ keine Symmetrie
2. $f_2(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f_2(x)$
   $\Longrightarrow$ gerade
3. $f_3(-x) = (-x)^2(-x) = x^2(-x) = -f_3(x)$
   $\Longrightarrow$ ungerade

Aufgabe 2

Die Umkehrfunktionen ergeben sich immer durch Vertauschen der Variablenbezeichnungen ($x \leftrightarrow y$) und anschließendes Auflösen nach y, wobei dann ggf. die passende(n), bekannte(n) Umkehrfunktion(en) einzelner Teilfunktion(en) verwendet werden müssen.

a) Die Funktion ist nur außerhalb von $[-2, 2]$ definiert (sonst Radikand negativ!); $x/2$ ist streng monoton steigend für alle x, $\sqrt{x}$ ist streng monoton steigend für $x > 0$, $x^2/4 - 1$ ist streng monoton steigend (fallend) für $x > 0$ ($x < 0$) $\Rightarrow$ die Gesamtfunktion ist streng monoton steigend für $x > 2$ und kann daher in diesem Bereich umgekehrt werden (Verlauf für $x < 2$ unklar, da Summe aus monoton steigender und monoton fallender Funktion).
Umkehrfunktion dort: $y = x + (1/x)$, mit Definitionsbereich $x > 1$ und Wertebereich $y > 2$.

b) $\arctan(x)$ ist streng monoton steigend für alle x, mit Wertebereich $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, in diesem Wertebereich ist $\sin(x)$ streng monoton steigend. Also ist die Gesamtfunktion überall streng monoton steigend, mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} =]-1, +1[$.
Umkehrfunktion: $y = \tan(\arcsin x)$
(*Anmerkung:* mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ kann diese Umkehrfunktion umgeformt werden

zu: $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; sie ist also nicht transzendent, sondern nur algebraisch. Diese Form kann dann erneut umgekehrt werden und liefert $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ als alternative Form der Ausgangsfunktion, die also ebenfalls lediglich algebraisch ist.)

c) Als monotones Intervall bietet sich $0 < x < \frac{\pi}{2}$ an, da dort alle Teilfunktionen $\ln(v)$, $\tan(u)$ und x^2 definiert und monoton (steigend) sind. Dort ist die Umkehrfunktion $y = \sqrt{\arctan(e^x)}$, definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit Wertebereich $0 < y < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
& y = mx + b \Leftrightarrow x = \frac{y}{m} - \frac{b}{m} (\text{ beachte: } m \neq 0!) \\
& \text{Also: } f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{b}{m} \\
& f(x) = f^{-1}(x) \text{ für alle x} \\
& \Leftrightarrow mx + b = \frac{x}{m} - \frac{b}{m} \text{ für alle x} \\
& \Leftrightarrow (m - \frac{1}{m})x + (b + \frac{b}{m}) = 0 \text{ für alle x} \\
& \text{ Man setze erst } x = 0 \text{ und dann } x = 1 \\
& \Leftrightarrow m - \frac{1}{m} = 0 \text{ , } b + \frac{b}{m} = 0 \\
& \Leftrightarrow m = \frac{1}{m} \text{ , } b = -\frac{b}{m} \\
& \Leftrightarrow m^2 = 1 \text{ und } (m+1)b = 0 \\
& \Leftrightarrow m = 1 \text{ , } b = 0 \text{ oder } m = -1 \text{ , } b \text{ beliebig} \\
& \text{ Mithin sind indentisch mit ihren Umkehrfunktionen} \\
& f(x) = x \text{ und} \\
& f(x) = -x + b, b \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

$N(t) = 0.01\ N_0$

$\Rightarrow N_0 \exp(-kt) = 0.01\ N_0$
$\Rightarrow \exp(-kt) = 0.01 = \frac{1}{100}$
$\ln \Rightarrow t = \frac{\ln(100)}{k} = 57207$ s =15h, 53min, 27s

Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
& \sin(3x) = \frac{1}{2i}[e^{3ix} - e^{-3ix}] = \frac{1}{2i}[(e^{ix})^3 - (e^{-ix})^3] \\
& \text{mit } a = e^{ix} \text{ und } b = e^{-ix} \Rightarrow \\
& \sin(3x) = \frac{1}{2i}(a^3 - b^3) = \frac{1}{2i}(a-b)[(a+b)^2 - ab] \\
& \sin(3x) = \frac{1}{2i}[e^{ix} - e^{-ix}][(e^{ix} + e^{-ix})^2 - e^{ix}e^{-ix}]
\end{aligned}
$$

$= \sin x[4\cos^2 x - 1] = \sin x[4\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x] = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

Aufgabe 6

$p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 2x - 24$

Alle Koeffizienten sind reell $\Rightarrow$ Mit jeder komplexen Nullstelle z ist auch z^* eine Nullstelle: $x_1 = i \Rightarrow x_2 = -i$ Zerlegung in bekannte Linearfaktoren und Polynom 2. Ordnung

$$f(x) = (x-i)(x+i)\sum_{k=0}^{2} b_k x^k = (x^2+1)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$

Koeffizientenvergleich:
$\Rightarrow b_0 = -24,\ b_1 = 2,\ b_2 = 2$
$\Rightarrow g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = -24 + 2x + 2x^2$

Nullstellen von $g(x) : x^2 + x - 12 = 0$
$\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$ und damit $x = 3,\ x_4 = -4$

$\Rightarrow b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 2(x-3)(x+4)$ und

$p(x) = 2(x-i)(x+i)(x-3)(x+4)$

Aufgabe 7

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8$, mit Nullstelle bei $x_0 = 2$, damit
$f(x) = (x-2)(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$
und laut Skript S. 46

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{k-1} - b_k x_0 = a_k$$
$$-b_0 x_0 = a_0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} b_3 &= a_4 = 1 \\ b_2 &= a_3 + b_3 x_0 = -4 + (1\cdot 2) = -2 \\ b_1 &= a_2 + b_2 x_0 = 6 + (-2\cdot 2) = 2 \\ b_0 &= a_2 + b_1 x_0 = -8 + (2\cdot 2) = -4 = \frac{a_0}{x_0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 + 2x - 4) =: (x-2)\cdot g(x)$
Nullstelle von $g(x)$: $x_1 = 2$ durch probieren, damit
$g(x) = (x-2)(c_2 x^2 + c_1 x + c_0)$

$$c_2 = b_3 = 1$$
$$c_1 = b_2 + c_2 x_1 = -2 + 2 = 0$$
$$c_0 = -\frac{b_0}{x_1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)g(x) = (x-2)^2(x^2+2)$
und damit hat $f(x)$zwei reale Nullstellen bei $x_0 = x_1 = 2$
und zwei komplexe Nullstellen bei $x_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$

Aufgabe 8

Die Aufgaben a) und b) sind *echt* gebrochen rationale Funktionen, daher ist keine einleitende Polynomdivision zur Aufspaltung in einen polynomialen Anteil (Asymptote) und einen echt gebrochen rationalen Anteil nötig. Stattdessen immer der Rest des Standardlösungswegs: Nennernullstellen ermitteln, damit Zerlegungsansatz aufstellen, mit Nenner durchmultiplizieren, ausmultiplizieren, Koeffizientenvergleich, Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der im Ansatz noch unbekannten Koeffizienten. Lösungen:

a) Echt gebrochen rationale Funktion:

$$\frac{1}{x^3-6x^2+9x} = \frac{1}{x(x^2-6x+9)} = \frac{1}{x(x-3)^2}$$

Mit Nullstellen des Nenners $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = 3$
Ansatz:

$$\frac{1}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

damit: $1 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$
$x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{9}$
$x = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$
Koeffizient von $x^2 \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{9}$

und damit $\dfrac{1}{x^3-6x^2+9x} = \dfrac{1}{9x} - \dfrac{1}{9(x-3)} + \dfrac{1}{3(x-3)^2}$

b) Nennernullstellen: $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$;
Ansatz: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}$, mit: $A = 2$, $B = -1$

c) Unecht gebrochene rationale Funktion:

$$\frac{25-x^5}{x^4+4x^3+5x^2} = -x+4-\frac{11x^3+20x^2-25}{x^4+4x^3+5x^2} = -x+4-\frac{11x^3+20x^2-25}{x^2(x^2+4x+5)}$$

Nullstellen von Nenner x^2+4x+5 sind komplex: $x_{1,2} = -2 \pm i$
$\Rightarrow$ Ansatz

$$\frac{11x^3+20x^2-25}{x^2(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5} = \frac{Ax(x^2+4x+5)+B(x^2+4x+5)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4x+5)}$$

$x = 0 \Rightarrow -25 = 5B \Rightarrow B = -5$
Koeffizient von x: $0 = 5A + 4B = 5A - 20 \Rightarrow A = 4$
Koeffizient von x^3: $11 = A + C = 4 + C \Rightarrow C = 7$
Koeffizient von x^2: $20 = 4A + B + D = 16 - 5 + D \Rightarrow D = 9$
und damit

$$\frac{25-x^5}{x^4+4x^3+5x^2} = -x+4-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7x+9}{x^2+4x+5}$$

Aufgabe 9

a) Nennernullstellen: $x_1 = 0$ (offensichtlich!), $x_{2,3} = -2$;
Ansatz: $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$, mit: $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$

b) Nennernullstellen: $x_1 = 1$ (raten), Rest nach Polynomdivision: $x^2 + 2x + 2$ hat keine reellen Nullstellen;
Ansatz: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$, mit: $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$

c) Echt gebrochene rationale Funktion mit komplexer Nullstelle des Nenners

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$= \frac{A(x-1)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(1+x^2)}$$

$x^3 - 2x^2 - 1 = A(x-1)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x-1)^2$
$x = 1 \Rightarrow B = -1$
$x = i : 1 - i = (Ci + D)(1-i)^2 \Rightarrow 2(1+i) = 4(Ci + D) \Rightarrow C = D = \frac{1}{2}$
$x = 0 : -1 = -A + B + D = -A - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

damit: $$\frac{x^3 - 2x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{2(1+x^2)}$$

Aufgabe 10

a) Unecht gebrochene rationale Funktion:
$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x+1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Ansatz: $$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \Rightarrow$$

(*) $x + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 &: \ A + C = 0 \\ x^1 &: \ -A + B = 1 \\ x^0 &: \ -B = 1 \end{aligned}$$

und damit $A = -2, \ B = -1, \ C = 2$
Alternativer Weg: Einsetzen von günstigen Werten für x :
$x = 1 \Rightarrow C = 2$
$x = 0 \Rightarrow B = -1$
Koeffizient von $x^2 \Rightarrow A = -C = -2$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1}$$

b) Nennernullstellen: $x_1 = -1$ (raten), Rest nach Polynomdivision: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$; weitere Nullstelle $x_2 = -1$ (raten), Rest nach Polynomdivision $x^2 + x + 2$ hat keine reellen Null-

stellen;
Ansatz: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+2}$, mit: $A = 2,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -1$