Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/15
Blatt 2
24.11-05.12.2014

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 1

Lösungen

Aufgabe 1

$n = 1 - 10, a_0 = A$

$a_i = (1+Z)a_{i-1}$
$a_1 = (1+Z)A$

$a_2 = (1+Z)a_1$
$a_2 = (1+Z)(1+Z)A$

$a_3 = (1+Z)a_2$
$a_3 = (1+Z)(1+Z)(1+Z)A$

$\rightarrow a_n = (1+Z)^n A$

$\rightarrow a_{10} = (1+Z)^{10} A$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n^2})} \\
&= \frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^4+3n^3+n^2+7n+1}-\sqrt{n^4+3n^3-n^2-7n+9}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^3+n^2+7n+1}+\sqrt{n^4+3n^3-n^2-7n+9}}{1}\\
&\qquad\times\frac{\sqrt{n^4+3n^3+n^2+7n+1}-\sqrt{n^4+3n^3-n^2-7n+9}}{\sqrt{n^4+3n^3+n^2+7n+1}+\sqrt{n^4+3n^3-n^2-7n+9}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+14n-8}{\sqrt{n^4+3n^3+n^2+7n+1}+\sqrt{n^4+3n^3-n^2-7n+9}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{14}{n}-\frac{8}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{7}{n^3}+\frac{9}{n^4}}}\\
&=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1
\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^{n+1}}{2^{3n}+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2\cdot 2^n}{8^n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{5}{8})^n+2\cdot\frac{2}{8}^n}{1+(\frac{1}{8})^n\cdot 7}=0$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}\\
&=0
\end{aligned}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{5n^2+7n-1}-\sqrt{3n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{5+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{5}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Aufgabe 3

a) Substitution $y=x^2\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}2^ky^k\Rightarrow a_k=2^k$

$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$

Damit konvergiert die Reihe für $|y|<\frac{1}{2}$ bzw.für $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $a_k = k^4 - 4k^3$
$\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{k^4 - 4k^3}{(k+1)^4 - 4(k+1)^3}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{1 - \frac{4}{k}}{(1+\frac{1}{k})^4 - \frac{4}{k}(1+\frac{1}{k})^3}| = 1$
Damit konvergiert die Reihe für $|x| < 1$.

Aufgabe 4

a) $a_k = (-1)^k(k+1)$
$\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{(-1)^k(k+1)}{(-1)^{k+1}(k+2)}| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} = 1$
Reihe konvergiert für $|x| < 1$

b) Substitution:
$y = (3x)^2 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}(3x)^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(y)^k$
$\Rightarrow a_k = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = 1$
Reihe konvergiert für $|y| < 1$, also für $(3x)^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$

c) $a_k = k!$
$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)} = 0$
Reihe konvergiert für nur für $x = 0$ und divergiert für alle anderen x.

Aufgabe 5

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to1} x^2 + \lim\limits_{x\to1} x - \lim\limits_{x\to1} 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$: Nenner und Zähler gehen für $x = 1$ gegen 0.
$(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)$
$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x+1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to2} \frac{5x^2 - 10x}{(x-2)(2x-5)} = \lim\limits_{x\to2} \frac{5x(x-2)}{(x-2)(2x-5)} = \lim\limits_{x\to2} \frac{5x}{2x-5} = -10$

d) Da $\sqrt{4 - x^2}$ nur für $|x| \le 2$ definiert ist,
existiert nur der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to2^-} \sqrt{4 - x^2}$
bzw. mit $x = 2 - h$, mit $h > 0$: $\lim\limits_{x\to2^-} \sqrt{4 - x^2} = \lim\limits_{h\to0} \sqrt{4 - (2-h)^2} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + 1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

Aufgabe 6

Lösungswege:

a) Umformung zu

$$\frac{\tan(x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sqrt{1+\cos x}}{\cos x}$$

In dieser Form sind alle beteiligten Funktionen bei $x = 0$ stetig und die Annäherungsrichtung ist irrelevant $\Rightarrow x = 0$ kann eingesetzt werden.

b) Einsetzen der Definition von $\sinh(x)$ in Exponentialfunktionen, dann kann die Division ausgefÃ¼hrt und der Grenzwert leicht ermittelt werden.

Lösungen:

$$\textbf{a)} \quad -\sqrt{2} \quad , \qquad \textbf{b)} \quad \frac{1}{2}$$

Aufgabe 7

a) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \left|\frac{p+1}{2^{2(p+1)}}\frac{2^{2p}}{p}\right| = \frac{p+1}{4p} = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{p}) \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ für } p \geq p_0 = 1$$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{2^{2p}}$ ist absolut konvergent.

b) Majorantenkriterium: $0 \leq \frac{k+1}{k^3} < \frac{2k}{k^3} = 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ für $k > 1$.

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3}$ absolut konvergent.

c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ konvergiert nicht, denn $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$ verletzt die notwendige Konvergenzbedingung $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

d) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{-9k-10}{10k}\right|^k} = \frac{9k+10}{10k} = \frac{9}{10} + \frac{1}{k} < \frac{9}{10} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20} < 1 \text{ für } k > k_0 = 20$$

Damit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$ absolut konvergent.

e) Leibnizkriterium: Die Folge $a_k = \frac{1}{(2k+1)^3}$ ist monoton fallend,

denn $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2(k+1)+1} \Rightarrow \frac{1}{(2k+1)^3} > \frac{1}{(2(k+1)+1)^3}$ für $k \geq 1$

Mit $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} = 0$ ist damit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ konvergent.

Absolute Konvergenz nach dem Majorantenkriterium:

$$\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right| = \frac{1}{(2k+1)^3} < \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4k^2},$$

und da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ absolut konvergent.