Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/15
Blatt 4
08.12-19.12.2014

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

Lösungen

Aufgabe 1

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

a) Nenner verschwindet für $x = \pm 1$, damit $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

b) Betrachte die Grenzwerte an den Definitionslücken:

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm 1} (x^2 + 1) = 2$$

Damit kann $g(x)$ zu einer auf ganz stetigen Funktion erweitert werden,

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } |x| \neq 1\,, \\ 2 & \text{für } |x| = 1\,. \end{cases}$$

die der stetigen Funktion $h(x) = x^2 + 1$ entspricht.

Aufgabe 2

a) $f'(x) = 30x^5 + 12x^3 - 1$

b) Produktregel: $f'(x) = 2x(x + 3) + x^2 - 1 = 3x^2 + 6x - 1$

c) Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{-1(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = -\dfrac{2}{(1 + x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^{3/4}) = \dfrac{3}{4}x^{-1/4} = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

e) Kettenregel: $f'(x) = 2\sin(ax) \cdot a\cos(ax) = 2a\sin(ax)cos(ax) = a \cdot \sin(2ax)$

f) Kettenregel, Produktregel:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{\ln(x^x)}) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln(x)})$$

$$= e^{x\ln(x)}\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x)) = x^x(1+\ln(x))$$

Aufgabe 3

Mögliche Lösungswege:

a) Umformung zu $\frac{\cos(\arcsin x)}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, erst dann ableiten;

b) Ableitung der Umkehrfunktion verwenden;

c) sinh-Funktion in Exponentialfunktionen umschreiben und $e^{\ln x} = x$ ausnutzen;

d,e,f) übliche Ableitungsregeln (Produktregel, Kettenregel).

Lösungen:

a)
$$y' = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \quad ,$$
$$y'' = \frac{2-3x^2}{x^3\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

b)
$$y' = \frac{-1}{1+x^2} \quad ,$$
$$y'' = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

c)
$$y' = \frac{x+1}{4x\sqrt{x}} \quad ,$$
$$y'' = -\frac{x+3}{8x^{5/2}}$$

d)
$$y' = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad ,$$
$$y'' = \frac{1}{x^2}\left((2x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

e)
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) \quad ,$$
$$y'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}\left(\cos(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})\right)$$

f)
$$y' = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}\sin^2(\sqrt{2x-1})\,\cos(\sqrt{2x-1}) \quad ,$$
$$y'' = \frac{3\sin(\sqrt{2x-1})}{2x-1}\left(2\cos^2(\sqrt{2x-1}) - \frac{\sin(\sqrt{2x-1})\cos(\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x-1}} - \sin^2(\sqrt{2x-1})\right)$$

Aufgabe 4

a) $f(x) = x\ln x - x$

$f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = (9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$g'(x) = -\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$g''(x) = (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x(-\frac{3}{2})(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x) = (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$g'''(x) = (-\frac{3}{2})(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x) + 6x(9-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3x^2(-\frac{5}{2})(9-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)$

$= 9x(9-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15x^3(9-x^2)^{-\frac{7}{2}}$

Aufgabe 5

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1-\exp(-x^2)}$ mit de l'Hospital:

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{6}{1+3x}\ln(1+3x) - 4\sin x\cos x}{2x\exp(-x^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+3x)}{x}\frac{3}{(1+3x)\exp(-x^2)} - \frac{\sin x}{x}\frac{2\cos x}{\exp(-x^2)}]$

$= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} - 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ und mit de l'Hospital:

$= 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{1} - 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 9 - 2 = 7$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{-3}}{1-\exp(\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-3x^{-4}}{\frac{2}{x^2}\exp(\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-3x^{-2}}{2\exp(\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{+6x^{-3}}{-\frac{4}{x^2}\exp(\frac{2}{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-3x^{-1}}{2\exp(\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{+3x^{-2}}{-\frac{4}{x^2}\exp(\frac{2}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-3}{4\exp(\frac{2}{x})} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 6

Lösungswege:

a) auf Hauptnenner bringen und addieren, dann 2 mal L'Hospital;

b) 3-mal L'Hospital.

Lösungen: alle Grenzwerte sind Null.

Aufgabe 7

a) Stationäre Punkte: $f'(x) = 0$.
$f'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \dfrac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$
$\Rightarrow 0 = 16 - 2x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$
Monotonie: $f'(x) < 0 :$
f streng monoton fallend, $f'(x) > 0 : f$ streng monoton steigend
$f'(x) < 0$ für $x \in]-4, -\sqrt{8}[$
$f'(x) > 0$ für $x \in]-\sqrt{8}, \sqrt{8}[$
$f'(x) < 0$ für $x \in]\sqrt{8}, 4[$
$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{8}$ ist lokales (und auch globales) Maxiumum
$\Rightarrow x_2 = -\sqrt{8}$ ist lokales (und auch globales) Minimum.

Aufgabe 8

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$$

a) $3x^2 + 2x + 1 = 3[(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}] > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$

b) Nullstellen: $0 = \ln(3x^2 + 2x + 1) \Rightarrow 3x^2 + 2x + 1 = 1$
$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$
$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\dfrac{2}{3}$
Stationäre Punkte: $f'(x) = \dfrac{6x + 2}{3x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3}$
$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty, -\dfrac{1}{3}[\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend
$f'(x) > 0$ für $x \in]-\dfrac{1}{3}, \infty[\Rightarrow f$ ist streng monoton steigend
$\Rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3}$ ist ein lokales (und auch globales) Minimum.

Aufgabe 9

Lösungswege:

a) Entweder auf direktem Weg (Ableitungen bilden, Entwicklungspunkt einsetzen, Resultate in allg. Taylorreihenformel einsetzen) oder $\cosh(u)$ in Exponentialfunktionen übersetzen, die Standardtaylorreihe für $\exp(u)$ verwenden und in der resultierenden Taylorreihe für $\cosh(u)$ die Substitution $u = 2x$ einsetzen.

b) Umschreiben in $x \cdot 1/(1-q)$ mit $q = x^2/a$; dabei ist $1/(1-q)$ die Summenformel der geometrischen Reihe $\sum_i q^i$;

c) Substitution $u = \sin x$, dann Standardreihen für $\exp(u)$ und $\sin(x)$ verwenden;

d) Substitutionen $u = 1 - e^{-x}$ und $v = -x$, dann Standardreihen für $\exp(v)$ und $\ln(1+u)$ verwenden.

Lösungen:

a) $y \approx 1 + 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{4}{45}x^6 \qquad$ für $|x| < \infty$

b) $y \approx x + \dfrac{x^3}{a} + \dfrac{x^5}{a^2} \qquad$ für $|q| < 1$, also für $|x| < \sqrt{|a|}$

c) $y \approx 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 \qquad$ für $|x| < \infty$

d) $y \approx x - x^2 + x^3 - \dfrac{13}{12}x^4 \qquad$ für $-1 < u \leq +1$, also für $x > -\ln 2$

Aufgabe 10(12)

Lösungswege und Lösungen:

a) Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\pi/2$, also strebt $f(x)$ gegen $\exp(-\pi^2/4)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Beachte: $\exp(-\pi^2/4)$ ist klein aber nicht Null.

b) Verwendung der üblichen Ableitungsregeln liefert:

$$\begin{aligned} y' &= -2y\frac{\arctan(x)}{x^2+1} \\ y'' &= \frac{-2y}{(x^2+1)^2}\left(1 - 2x\arctan(x) - 2\arctan^2(x)\right) \end{aligned}$$

(Wie so oft, ist es auch hier nützlich, wo immer möglich y und y' selbst zu verwenden; das erhöht die Übersichtlichkeit und vermindert den Arbeitsaufwand.)

c) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -2$, also lauten die ersten Terme der Taylorreihe: $\tilde{f}(x) \approx 1 - x^2$.

d) Quadrieren der gegebenen Taylorreihe für $\arctan(x)$ (unter Mitnahme der Terme bis zur nötigen Ordnung) liefert

$$\arctan^2(x) \approx x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 \mp \cdots$$

Mit der Standardtaylorreihe für $\exp(v)$ und $v = -u$ sowie $u = \arctan^2(x)$ ergibt sich schließlich:

$$e^{-\arctan^2(x)} \approx 1 - x^2 + \frac{7}{6}x^4 \mp \cdots$$