Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/15
Blatt 5
08.01-23.01.2015

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 1

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Die Ableitung von $^{\alpha x}$ ist $\alpha^{\alpha x}$, also muß man durch α teilen, um das unbestimmte Integral zu erhalten, $\frac{1}{\alpha}^{\alpha x} + C$.
(b) Die Ableitung von $\ln x$ ist $\frac{1}{x}$, also ist der Logarithmus Stammfunktion für $x \geq 0$. Weiterhin ist die Hyperbel erster Ordnung $y = \frac{1}{x}$ ungerade, also läßt sich die Beziehung aus Symmetriegründen auf die negative Achse ausweiten und man erhält $\ln |x| + C$ als unbestimmtes Integral.

Aufgabe 2

(a) $$\int\limits_0^1 (x^2 + e^x)dx = [\frac{x^3}{3} + e^x]|_0^1 = e - \frac{2}{3}$$

(b) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)dx = \int\limits_{-3\pi}^{3\pi} \sin(y)\frac{dy}{3} = \frac{1}{3}[-\cos y]|_{-3\pi}^{3\pi} = \frac{1}{3}(1-1) = 0$$

Aufgabe 3

Partialbruchzerlegung mit reellem Ansatz (linearer Term im Zähler für quadratischen Nenner mit komplexen Nullstellen)

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$= x^3(A+C) + x^2(-A+B-2C+D) + x(A+C-2D) + (-A+B+D) \Rightarrow$$

$$A + C = 1 \quad -A+B-2C+D = -2 \quad A+C-2D = 0 \quad -A+B+D = -1$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Integrale:

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|$$
$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}$$
$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x \qquad (\ln \text{ mit } y = 1+x^2)$$
$$\Rightarrow \int \frac{x^3+2x^2-1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

Aufgabe 4

Lösungswege:

a) Partialbruchzerlegung des Integranden in $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+6}$;

b) Partialbruchzerlegung des Integranden in $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$;

c) Partialbruchzerlegung des Integranden in $x - 1 + \frac{x}{x^2+1}$.

Lösungen:

a) $2\ln|x-1| - \ln|x+6| + C$

b) $\ln|x| - \ln|x+2| + \dfrac{2}{x+2} + C$

a) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + \dfrac{1}{2}x^2 - x + C$

Aufgabe 5

a) Substitution $z = \cos x$, $dz = -\sin x\, dx$;

b) Substitution $z = \arcsin x$, $dz = dx/\sqrt{1-x^2}$.

Lösungen:

b) $\dfrac{1}{n-1}\cos^{1-n} x + C$

d) $\dfrac{1}{2}\arcsin^2 x + C$

(c) $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 z dz = \frac{1}{2}z^2|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{mit Substitution } z = \ln x \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

Aufgabe 6

a) Substitution $u = x^2$ einsetzen, Nennerpolynom in u faktorisieren (ggf. durch Bestimmung seiner Nullstellen), das resultierende Integral ist (formal nach einer weiteren Substitution $v = u - 1$) ein Grundintegral.

b) Partialbruchzerlegung auf üblichem Weg; bringt man die beiden additiven Terme im Endresultat auf den gemeinsamen Hauptnenner, ergibt sich die Form von Teilaufgabe (a).

Lösungen:

$$\textbf{a)} \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1} + C \quad , \qquad \textbf{b)} \quad \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x-1} - \frac{-1}{x+1}\right) + C$$

Aufgabe 7

a) Einmalige partielle Integration; das verbleibende Integral ist ein Grundintegral;

b) Nach zweimaliger partieller Integration erhält man wieder das ursprüngliche Integral.

c) cos^2 kann durch $1 - sin^2$ ersetzt werden: $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$.

Lösungen:

$$\textbf{a)} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left((n+1)\ln x - 1\right) + C \quad , \qquad \textbf{b)} \quad \frac{c}{b^2+c^2}, \qquad \textbf{c)} \quad \frac{1}{2}(x - cos(x)sin(x))$$

Aufgabe 8

(a) $\int xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2} + c$ mit Substitution $z = \alpha x^2 \quad \frac{dz}{dx} = 2\alpha x$

(b) $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$ mit partieller Integration

(c) $\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x dx$ mit partieller Integration

$\Rightarrow 2 \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x + c'$

$\Rightarrow \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

Aufgabe 9

(a) $\int\limits_{-2}^{2} x^2|x|dx = \int\limits_{-2}^{0} -x^3 dx + \int\limits_{0}^{2} x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4|_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^4|_{0}^{2} = 4 + 4 = 8$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{x}{x+2}dx = \int\limits_0^1 \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{2}{x+2}dx = (x - 2\ln(x+2))|_0^1 = 1 + 2\ln(\frac{2}{3})$

oder über Substitution $z = x + 2 \quad \frac{dz}{dx} = 1$

(c) $\int\limits_0^\pi x \sin x dx = (-x\cos x)|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x dx \qquad$ mit partieller Integration $= \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$

Aufgabe 10

(a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-} \int\limits_0^a (1-x)^{-\frac{1}{3}}dx$

$\int\limits_0^a (1-x)^{\frac{1}{3}} = -\int\limits_1^{1-a} y^{-\frac{1}{3}}dy = -\left[\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\right]_1^{1-a} = -\frac{3}{2}(1-a)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-}\left[-\frac{3}{2}(1-a)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}$

(b) $\int\limits_0^\infty {}^{-x}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b {}^{-x}x = \lim\limits_{b\to\infty} 1 -{}^{-b} = 1.$

Aufgabe 11

Die Aufgabenstellung enthält bereits eine detaillierte Schilderung des Lösungswegs. Die Lösungen der einzelnen Teilaufgaben sind:

a)	$\int \ln(z)dz$
b)	$(x-1)\ln(x-1) - (x-1) + C$
c)	$-1 - \lim\limits_{a\to 1}\{(a-1)\ln(a-1)\}$
d)	Der Limes in (c) ist Null.
e)	1