Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/15
Blatt 5
ab dem 26.01.2015

# Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

## Lösungen

### Vektoren Aufgabe 1

a)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a} = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\mathrm{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \|\mathbf{b}\| = \sqrt{0+9+16} = 5, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_\mathrm{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\mathrm{r}_\mathrm{ab} = \mathrm{r}_\mathrm{ba} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} \approx 4.24.$$

c)

$$\mathbf{ab} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\cos\phi_\mathrm{ab} \quad \Rightarrow \quad \phi_\mathrm{ab} = \arccos\left[\frac{\mathbf{ab}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right],$$

$$\phi_\mathrm{ab} = \phi_\mathrm{ba} = \arccos\left[\frac{6}{5\sqrt{5}}\right] \approx \arccos(0.537) \widehat{=} 57.5^\circ.$$

d)

$$\mathrm{F}_\mathrm{ab} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\sin\phi_\mathrm{ab} = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{F}_\mathrm{ab} = \mathrm{F}_\mathrm{ba} = \sqrt{64+16+9} = \sqrt{89} \approx 9.4.$$

**Aufgabe 2**

a)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a}_1 = \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{9+16+0} = 5, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a}_2 = \|\mathbf{a}_2\| = \sqrt{25+0+144} = 13, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a}_3 = \|\mathbf{a}_3\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\mathrm{r}_{12} = \mathrm{r}_{21} = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\| = \sqrt{4+16+144} = \sqrt{164} \approx 12.8,$$

$$\mathrm{r}_{13} = \mathrm{r}_{31} = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} \approx 4.36,$$

$$\mathrm{r}_{23} = \mathrm{r}_{32} = \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\| = \sqrt{25+1+121} = \sqrt{147} \approx 12.1.$$

c)

$$\mathbf{a}_\mathrm{i}\mathbf{a}_\mathrm{j} = \|\mathbf{a}_\mathrm{i}\|\,\|\mathbf{a}_\mathrm{j}\|\,\cos\phi_\mathrm{ij}, \quad \Rightarrow \quad \phi_\mathrm{ij} = \arccos\left[\frac{\mathbf{a}_\mathrm{i}\mathbf{a}_\mathrm{j}}{\|\mathbf{a}_\mathrm{i}\|\,\|\mathbf{a}_\mathrm{j}\|}\right],$$

$$\phi_{12} = \phi_{21} = \arccos\left[\frac{15}{65}\right] \approx 1.34 \ \widehat{=}\ 77°,$$

$$\phi_{13} = \phi_{31} = \arccos\left[\frac{4}{5\sqrt{2}}\right] \approx 0.97 \ \widehat{=}\ 56°,$$

$$\phi_{23} = \phi_{32} = \arccos\left[\frac{12}{13\sqrt{2}}\right] \approx 0.86 \ \widehat{=}\ 49°.$$

d)

$$\mathrm{F}_\mathrm{ij} = \|\mathbf{a}_\mathrm{i}\|\,\|\mathbf{a}_\mathrm{j}\|\sin\phi_\mathrm{ij} = \|\mathbf{a}_\mathrm{i} \times \mathbf{a}_\mathrm{j}\|,$$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 48 \\ -36 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{F}_{12} = \mathrm{F}_{21} = \sqrt{4000} \approx 63.2,$$

$$\mathrm{F}_{13} = \mathrm{F}_{31} = \sqrt{34} \approx 5.8,$$

$$\mathrm{F}_{23} = \mathrm{F}_{32} = \sqrt{194} \approx 13.9.$$

**Aufgabe 3**

Lösungen:

**a)** $\hat{\alpha} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \frac{2}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

**b)** $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\zeta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ -(2+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

**c)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}, \quad \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}, \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = -2\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -3\sqrt{2}, \quad \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\beta}|^2 = \frac{17}{4}$

**d)** $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}\times\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \quad \vec{\alpha}\times\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} - 6 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$

$\vec{\beta}\times\vec{\beta} = \vec{0}$ für alle $\vec{\beta}, \quad \vec{\beta}\times\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

**e)** $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = 9 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}-3), \quad (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}),$

$\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) = -\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) = -\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}), \quad \vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{\gamma}) = \vec{\beta}\cdot\vec{0} = 0$

**Aufgabe 4**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{xy} = \pm|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|, \\ &\Longleftrightarrow \quad -2 + 5\mathrm{s} = \pm\sqrt{1+\mathrm{s}^2}\sqrt{29}, \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{s} = -\frac{5}{2}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{Probe: } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 - \frac{25}{2} = -\frac{29}{2} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4+25}{4}29} = -\sqrt{1+\frac{25}{4}}\sqrt{29} = -|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|.$$

**Aufgabe 5**

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x}\mathbf{y} = 0,$$

$$\iff 2\mathrm{s} - 3 + \mathrm{s} = 3\mathrm{s} - 3 = 0,$$

$$\iff \mathrm{s} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Probe:} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0.$$

**Aufgabe 6**

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{a} = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{12}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \|\mathbf{b}\| = 3, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\cos\phi_{\mathrm{ab}} = \frac{\mathbf{ab}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{-2+4+4}{3\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{a}_{\|} = \cos\phi_{\mathrm{ab}}\, \|\mathbf{a}\|\, \mathbf{e}_{\mathrm{b}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\|} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Probe:} \quad \mathbf{a}_{\perp}\mathbf{b} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,(-4+2+2) = 0.$$

**Aufgabe 7**

Lösungsweg: Vektorprodukt zweier Vektoren liefert einen dritten Vektor senkrecht zu den ersten beiden; Orthogonalitätsnachweis mit Test ob Skalarprodukt gleich Null.
Lösungen:

$$\textbf{a)}\quad \vec{n}\times\vec{m} = -2\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder } 2\hat{k} \text{ oder } \hat{k}\ \textit{etc.}$$

$$\textbf{b)}\quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{c)}\quad \vec{x}\times\vec{y} = \begin{pmatrix} -bc \\ -ad \\ ac \end{pmatrix}$$

**Geometrie Aufgabe 8**

Lösungsweg: Geradengleichung in 3 skalare Gleichungen übersetzen, die daraus resultierenden Ausdrücke für $x$ und $z$ in die Ebenengleichungen einsetzen, dann:

**a)** Dies liefert eine Bestimmungsgleichung für $\lambda$, was in die Geradengleichung eingesetzt den einen Schnittpunkt liefert;

**b)** Dies führt zum Widerspruch;

**c)** Dies führt zu von $\lambda$ unabhängigen Gleichungen, d.h. alle Werte für $\lambda$ sind erlaubt.

Bei (b) und (c) ist der Normalenvektor $(\frac{3}{2}, 0, 1)^T$ der Ebene senkrecht auf dem Vektor $(-2, 1, 3)^T$ entlang der Geraden, daher sind in beiden Fällen Gerade und Ebene parallel. Bei (b) ist der Aufpunkt $(3|0|-4)$ der Geraden *nicht* in der Ebene, wie man durch Einsetzen in die Ebenengleichung leicht testen kann. Daher sind alle anderen Punkte der Geraden auch nicht in der Ebene. Umgekehrt ist bei (c) der Aufpunkt der Gerade *in* der Ebene und damit alle anderen Punkte auch.
Lösungen:

**a)** $(1, 1, -1)^T$ , **b)** $g$ parallel zu $e$ , **c)** Gerade in Ebene.

**Aufgabe 9**

Lösungsweg bei (e): Die Schnittgerade von $e_1$ und $e_3$ wurde bereits in (d) berechnet, also ist nur noch der Schnittpunkt dieser Schnittgeraden mit $e_2$ zu bestimmen.
Lösungen:

**a)** Schnittpunkt $(1|1)$

**b)** $g_1$ liegt in $e_1$

**c)** Schnittpunkt $(2|0|0)$

**d)** Schnittgerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (selbe Gerade, anderer Aufpunkt), usw.

**e)** Schnittpunkt $(4|7|-1)$

## Aufgabe 10

Lösungen:

**a)** $e_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** Schnittgerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$

**c)** Das ist die 2.Winkelhalbierende (wegen der Form des Richtungsvektors) in einer Ebene parallel zur $x, y$-Ebene (wegen des Aufpunkts) im Abstand 1 von der $x, y$-Ebene und damit auch vom Ursprung. (Einsicht, keine Rechnung nötig)

**d)** $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

**e)** $90°$

**f)** 2

## Mehrdimensionale Differentialrechnung

## Aufgabe 11

Kurzschreibweise: $\beta = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

1. $\nabla f = \begin{pmatrix} \beta - x^2\beta \\ -xy \cdot \beta \end{pmatrix}$

2.

$$\begin{aligned} H_f &= \begin{pmatrix} -x\beta - 2x\beta + x^3\beta & -y\beta + x^2y\beta \\ -y\beta - x^2y\beta & -x\beta - xy^2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3x\beta + x^3\beta & -y\beta + x^2y\beta \\ -y\beta - x^2y\beta & -x\beta - xy^2\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Probe: Außerdiagonalelemente stimmen überein, das Schwarzsche Lemma ist somit erfüllt.

3.

$$\begin{aligned}
\nabla f_1 = 0 &\leftrightarrow \beta - x^2\beta = 0 \\
&\leftrightarrow x^2 = 1 \quad (\text{da } \beta \neq 0) \\
&\leftrightarrow x = \pm 1 \\
\nabla f_2 = 0 &\leftrightarrow -xy\beta = 0 \\
&\leftrightarrow xy = 0 \quad (\text{da } \beta \neq 0) \\
&\leftrightarrow y = 0 \quad (\text{da } x = \pm 1 \neq 0)
\end{aligned}$$

Die stationären Punkte sind also $(1,0)$ und $(-1,0)$. Die zugehörigen Hessenmatrizen sind $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, also ist $(1,0)$ ein Maximalpunkt und $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also ist $(-1,0)$ ein Minimalpunkt.

4. Laut hergeleiteter Hessematrix sind am Punkt $(0,0)$ alle zweiten Ableitungen sowie die y-Komponente der ersten Ableitung Null. Die x-Komponente der ersten Ableitung ist Eins. Die Taylornäherung zweiter Ordnung für $f$ ist dann also $f(x,y) \approx x$. Da $f$ für große $x$ und $y$ gegen Null geht, ist dies eine schlechte Näherung.

## Aufgabe 12

Lösungswege:

**a)** Berechnung des allgemeinen Gradientenvektors: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x-2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x-2}$; dann Einsetzen der Werte $x = 1$ und $y = 2$;

**b)** Normierung des vorgegebenen Richtungsvektors: $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Multiplikation mit dem Gradientenvektor.

Lösungen:

$$\textbf{a)} \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \qquad \textbf{b)} \quad -2\sqrt{5}$$

## Aufgabe 13

Lösungswege: Ermittlung der nötigen partiellen Ableitungen, Ausklammern aller möglichen gemeinsamen Faktoren. Lösungen:

$$\textbf{a)} \quad \vec{\nabla} f = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2\ln^2(y)}} \begin{pmatrix} \ln(y) \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} \quad , \qquad \textbf{b)} \quad \vec{\nabla} g = g \begin{pmatrix} \cot(u) \\ -\tan(v) \\ \sin(w)\cos(w) \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\textbf{c)} \quad \vec{\nabla} h = \frac{bc^2d^3}{2h} \begin{pmatrix} bcd \\ 2acd \\ 3abd \\ 4abc \end{pmatrix} \quad , \tag{2}$$

**Aufgabe 14**

Lösungsweg:

a,b) Definitionen Gradient/Richtungsableitung verwenden.

c) Koordinaten des Ursprungs in den in (b) ermittelten Ausdruck für die Richtungsableitung einsetzen.

d) Deutung als Niveaufläche von $F = f - z = 0$, Gradientenvektor von $F$ im angegebenen Punkt konstruieren, $z$-Wert zum angegebenen Punkt $(0, \pi)$ berechnen $\Rightarrow$ Ortsvektor eines Punkts in der Tangentialebene.

Lösungen:

**a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (x^2 - y^2)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{\cos x} \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2y}{\cos x}$

**b)** $\dfrac{df}{ds} = \left((x^2 - y^2)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{\cos x}\right) e_x - \dfrac{2y}{\cos x} e_y$

**c)** $\left.\dfrac{df}{ds}\right|_{0,0} = 0 \qquad$ für alle $e_x, e_y$

**d)** Ebenengleichung: $\quad z = -2\pi y + \pi^2 \quad$ (parallel zur $x$-Achse)