

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

Ankündigungen

Aktuelles: <http://theochem.pctc.uni-kiel.de/mathe.html>

Übungsaufgaben

Folgen, Reihen und Grenzwerte

1. Das Ausgangskapital A wird mit einem Zinssatz Z jährlich verzinst. Rechnen Sie den Kapitalertrag für einen Zeitabschnitt von 10 Jahren aus. Das Kapital a_i nach i Zeitabschnitten (Jahren) ist $a_i = a_{i-1} + Za_{i-1} = (1 + Z)a_{i-1}$, nach dem ersten Jahr $a_1 = (1 + Z)A$.

2. Bestimmen Sie, falls konvergent, die Grenzwerte der Folgen:

(a) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}$

(b) $a_n = \sqrt{n^4 + 3n^3 + n^2 + 7n + 1} - \sqrt{n^4 + 3n^3 - n^2 - 7n + 9}$

(c) $a_n = \frac{5^n + 2^{n+1}}{2^{3n} + 7}$,

(d) $\boxed{\text{S}}$ $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

(e) $\boxed{\text{S}}$ $a_n = \frac{n + 2}{\sqrt{5n^2 + 7n - 1} - \sqrt{3n^2 + 5}}$,

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$ (b) $\boxed{\text{S}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} (k^4 - 4k^3)x^k$

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k + 1) x^k$ (d) $\boxed{\text{S}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^{2k}$ (e) $\boxed{\text{S}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

5. Bestimmen Sie die folgenden (evtl. einseitigen) Grenzwerte:

(a) $\boxed{\text{S}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ (c) $\boxed{\text{S}}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 10x}{(x - 2)(2x - 5)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4 - x^2}$ (e) $\boxed{\text{S}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

Hinweis zu (e) : Verwenden Sie die Identität $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

6. Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$, b) $\boxed{\text{S}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{e^x}$

Hinweis zu (a): Erweitern Sie mit $\sqrt{1 + \cos(x)}$ und verwenden Sie $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

7. X Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Welche der konvergenten Reihen sind nicht absolut konvergent?

a) $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{2^{2p}}$ b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k} \right)^k$ e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

Nutzen Sie die folgenden Konvergenzkriterien: Quotientenkriterium in (a); Majorantenkriterium in (b); Wurzelkriterium in (d); Leibnizkriterium in (e).