Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/2015
Blatt 4
ab 08.12.2014

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

Ankündigungen

Vorlesungsskript & Aktuelles: `http://theochem.pctc.uni-kiel.de/mathe.html`
2. Zwischentest: Donnerstag, 18.12.2014, 15-16 Uhr, OHP 5 Chemie 1&2

Übungsaufgaben

Stetigkeit

1. (a) Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = |x|$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ und überprüfen Sie, ob f in $\mathcal{D}(f)$ überall stetig ist.

   (b) Gegeben sei die reelle Funktion

   $$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}.$$

   Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(g)$. Diskutieren Sie die stetige Ergänzbarkeit g an den Definitionslücken.

Differentialrechnung

2. Differenzieren Sie die folgenden reellen Funktionen f mit $f(x) =$

   (a) $5x^6 + 3x^4 - x$ (b) $\boxed{\text{S}}$ $(x^2 - 1)(x + 3)$ (c) $\boxed{\text{S}}$ $(1 - x)/(1 + x)$
   (d) $\boxed{\text{S}}$ $\sqrt[4]{x^3}$ (e) $\sin^2(ax)$ (f) x^x

3. Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $y = \cot(\arcsin(x))$ (b) $y = \operatorname{arccot}(x)$ (c) $\boxed{\text{S}}$ $y = \sinh(\ln\sqrt{x})$

   (d) $\boxed{\text{S}}$ $y = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (e) $\boxed{\text{S}}$ $y = \sin(\sqrt{x})$ (f) $\boxed{\text{X}}$ $y = \sin^3\left(\sqrt{2x - 1}\right)$

4. $\boxed{\text{X}}$ Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktionen
   (a) $f(x) = x \ln x - x$ für $x > 0$;
   (b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ für $|x| < 3$.

5. Berechnen Sie (mit Hilfe der Regel von de l'Hospital) die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\ln(1 + 3x)]^2 - 2(\sin x)^2}{1 - e^{-x^2}}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{-3}}{1 - e^{2/x}}$

   (c) $\boxed{\text{S}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1 + x)}$ (d) $\boxed{\text{S}}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(x + 1)}{2x^2}$ (e) $\boxed{\text{S}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

6. Untersuchen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung der Regel von de L'Hospital:
   (a) $\boxed{\text{S}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} \right)$, (b) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\tanh(x) - 1 \right)$

7. Gegeben sei die auf dem Intervall $]-4, 4[$ definierte Funktion

$$h(x) = x\sqrt{16 - x^2}.$$

   (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion h und untersuchen Sie anhand der Monotonieeigenschaften von $h(x)$, um welchen Typ (Minimum, Maximum, Sattelpunkt) es sich jeweils handelt.
   (b) Skizzieren Sie die Funktion h.

8. $\boxed{\text{S}}$ Gegeben sei die Funktion
   $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$.
   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.
   (b) Bestimmen Sie, falls möglich, die Nullstellen sowie die stationären Punkte der Funktion f. Diskutieren Sie, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
   (c) Skizzieren Sie die Funktion f.

9. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Taylorreihen um $x_0 = 0$, auf möglichst einfache Weise (i.d.R. unter Verwendung von Standardtaylorreihen). Machen Sie, wenn nötig, Angaben über einen ggf. beschränkten Gültigkeitsbereich Ihrer Entwicklung!

(a) $\boxed{\text{S}}$ $y = \cosh(2x)$,	bis zur 6. Ordnung
(b) $y = \dfrac{ax}{a - x^2}$,	bis zur 5. Ordnung
(c) $\boxed{\text{S}}$ $y = e^{\sin(x)}$,	bis zur 4. Ordnung
(d) $y = \ln\left(2 - e^{-x}\right)$,	bis zur 4. Ordnung

   Hinweis zu (b): Nutzen Sie die Verwandtschaft des gegebenen Ausdrucks mit der Summenformel für die geometrische Reihe aus.
   Zusatz: Versuchen Sie, diese Reihen auch direkt aus der Grunddefinition der Taylorreihe herzuleiten.

12) $\boxed{\text{S}}$ (Klausuraufgabe MfC1 22.Okt.2013) Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \exp(-\arctan^2(x))$$

   (a) Skizzieren Sie den Verlauf von $\arctan(x)$. Gegen welchen Wert strebt $\arctan(x)$ für $x \to \pm\infty$? Berechnen Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.
   (b) Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung von $f(x)$.
   (c) Ermitteln Sie die Terme nullter, erster und zweiter Ordnung der Taylorentwicklung von $f(x)$ um $x_0 = 0$ mit Hilfe der allgemeinen Taylorreihendefinition und den Ableitungen aus Teilaufgabe (b).