Prof. Dr. D. Egorova
Prof. Dr. B. Hartke

WiSe 2014/2015
Blatt 6
ab 26.01.2015

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

Ankündigungen

Übungsblätter & Aktuelles:	`http://theochem.pctc.uni-kiel.de/`
3. Zwischentest:	Donnerstag 29.01.2015, 15-16 Uhr
Abschlussklausur:	Dienstag, 17.02.2015, 8-10 Uhr

Übungsaufgaben

Vektoren

1. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie den Betrag von $\mathbf{a}$ und den Einheitsvektor $\mathbf{e_a}$ zu $\mathbf{a}$ (d.h. den zu $\mathbf{a}_i$ kollinearen Vektor mit der Norm Eins).
   (b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Endpunkten der Ortsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
   (c) Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
   (d) Wie gross ist die Fläche F des von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms?

2. $\boxed{\text{SX}}$ Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie für jeden Vektor $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots 3$ den Betrag von $\mathbf{a}_i$ und geben Sie den Einheitsvektor $\mathbf{e}_{\mathbf{a}_i}$ zu $\mathbf{a}_i$ an.
   (b) Für alle Kombinationen von i und j, berechnen Sie
      i. den Abstand r_{ij} der Endpunkte der Ortsvektoren $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{a}_j$,
      ii. den Winkel φ_{ij} zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{a}_j$,
      iii. die Fläche F_{ij} des von den Vektoren $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{a}_j$ aufgespannten Parallelogramms.

      Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass $r_{ji} = r_{ij}$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}$ und $F_{ji} = F_{ij}$.

3. $\boxed{\text{SX}}$ Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie:
   (a) die normierten Vektoren $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$, $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$, $\frac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}$

(b) die Vektoren $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$ und $\vec{\zeta} = \frac{1}{2}\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$

(c) die Skalarprodukte $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ und $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$,

(d) die Vektorprodukte $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \times \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \times \vec{\beta}$, und $\vec{\beta} \times \vec{\gamma}$.

4. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$
Für welche Werte $s \in \mathbb{R}$ sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ parallel?

5. $\boxed{\text{S}}$ Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3 \\ s \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$
Für welche Werte $s \in \mathbb{R}$ sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal?

6. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Zerlegen Sie $\mathbf{a}$ in seinen zu $\mathbf{b}$ parallelen Teil $\mathbf{a}_\parallel$ (die sogenannte Projektion von $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{b}$) und seinen zu $\mathbf{b}$ orthogonalen Teil $\mathbf{a}_\perp$. Rechnen Sie die Probe für die Orthogonalität von $\mathbf{a}_\perp$ und $\mathbf{b}$

7. $\boxed{\text{S}}$ Finden Sie einen Vektor senkrecht zu den folgenden Vektoren und zeigen Sie anschließend die Orthogonalität mit Hilfe des Skalarprodukts: (a) $\vec{n} = (1, 1, 0)^T$ und $\vec{m} = (1, -1, 0)^T$
(b) $\vec{a} = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})^T$ und $\vec{b} = (1, 0, \sqrt{2})^T$
(c) $\vec{x} = (a, 0, b)^T$ und $\vec{y} = (0, c, d)^T$

Geometrie

8. Jeweils wo schneiden sich die Gerade $g: \ \vec{r} = (3, 0, -4)^T + \lambda(-2, 1, 3)^T$ und folgende Ebenen:

   (a) $e: \ 4x - z = 5$
   (b) $\boxed{\text{S}}$ $e: \ -\frac{3}{2}x - z = 5$
   (c) $\boxed{\text{S}}$ $e: \ -\frac{3}{2}x - z = -\frac{1}{2}$

   Interpretieren Sie die Resultate geometrisch-anschaulich!

9. Gegeben sind die folgenden Geraden bzw. Ebenen:

$$g_1: \quad \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1: \quad \vec{s} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2: \quad \vec{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 1$$

Berechnen Sie Schnittpunkte/-geraden zwischen

(a) $\boxed{\text{S}}$ g_1 und g_2

(b) $\boxed{\text{S}}$ g_1 und e_1

(c) $\boxed{\text{S}}$ g_2 und e_2

(d) e_1 und e_3

(e) e_1, e_2 und e_3

10. $\boxed{\text{S}}$ (Klausuraufgabe Mathematik für Chemiker 1, Uni Kiel, 22.10.2013)
Gegeben sind die vier Punkte A = $(0|0|1)$, B = $(a|a|2)$, C = $(a|a|0)$ und D = $(a|-a|1)$, mit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Verwenden Sie die in der Vorlesung eingeführten Methoden der Vektorrechnung für folgende Aufgaben:

   (a) Gleichung der Ebene e_1 durch die Punkte A,B,D und der Ebene e_2 durch die Punkte A,C,D, jeweils in Parameterform.

   (b) Gleichung der Schnittgeraden g dieser beiden Ebenen e_1 und e_2 in Parameterform.

   (c) Beschreiben Sie die Lage dieser Geraden g im Raum mit Worten. Bestimmen Sie ihren Abstand vom Ursprung, entweder mit einer geeigneten Formel oder durch schriftlich begründete "Einsicht".

   (d) Normalenvektoren $\vec{n}_1$ bzw. $\vec{n}_2$ zu den Ebenen e_1 bzw. e_2.

   (e) Winkel zwischen den beiden Ebenen e_1 bzw. e_2 aus den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$.

   (f) Volumen des Spats, der von den Vektoren $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ und $\overrightarrow{\text{AD}}$ aufgespannt wird.

mehrdimensionale Differentialrechnung

11. Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x, y) = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} .$$

   (a) Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} f$.

   (b) Berechnen Sie die Hessematrix H_f.

   (c) Bestimmen Sie Lage und Art der stationären Punkte von f.

   (d) Entwickeln Sie f in eine Taylorreihe zweiter Ordnung um den Punkt $(0, 0)$. Ist diese eine gute Näherung für f für grosse x, y?

12. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = (x^2+y^2-4)/(x-2)$. Bestimmen Sie im Punkt $P(1|2)$

   - $\boxed{\text{S}}$ die Richtung des stärksten Anstiegs
   - die Ableitung in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. $\boxed{\text{SX}}$ Stellen Sie den Gradientenvektor für folgende Funktionen auf.

   (a) $f(x, y) = \arcsin(ax \ln(y))$

   (b) $g(u, v, w) = \dfrac{1}{\sin(u)\cos(v)\tan(w)}$

   (c) $h(a, b, c, d) = \sqrt{ab^2c^3d^4}$

14. $\boxed{\text{S}}$ (Klausuraufgabe Mathematik für Chemiker 1, 10.4.2008) Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\cos x}$$

(a) Bestimmen Sie den Gradientenvektor dieser Funktion.

(b) Geben Sie die Richtungsableitung für eine allgemeine Richtung $\hat{e}$ an.

(c) Zeigen Sie, daß die Richtungsableitung im Ursprung unabhängig von der Richtung ist.