Prof. Dr. D. Egorova

SoSe 2013
Blatt 2
24.4.2013

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 2

Lösungen

Vektorräume (Fortsetzung)
Aufgabe 1
siehe Lösungen MfC2 Blatt2, Augabe 2 unter ravel.pctc.uni-kiel.de
Aufgabe 2

Sei $\lambda_1(\mathbf{a}_1 + \nu\mathbf{a}_2) + \lambda_2\mathbf{a}_2 + .. + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$
z.z: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
Da $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig,
$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1\nu + \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
$\Rightarrow \{\mathbf{a}_1 + \nu\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ linear unabhängig.

Da diese Menge aus n Vektoren besteht, ist sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Aufgabe 3

a) (i) z.z: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ linear unabhängig.

$$\text{Sei} \quad 0 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0 &= \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \qquad (1),\\
0 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \qquad (2),\\
0 &= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \qquad (3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)+(3): \quad 0 &= 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 0\lambda_3, \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2,\\
(3)-(2): \quad 0 &= 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, \quad \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_2,\\
\text{in } (1): \quad 0 &= -3\lambda_2, \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \text{ linear unabhängig.}$$

(*ii*) Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow$ die Menge der drei linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) konstruiere Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\mathbf{e'}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_1 \langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle = \frac{1}{3}(1+2+6) = 3,$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e'}_2}{\|\mathbf{e'}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e'}_3 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{e}_1 \langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle - \mathbf{e}_1 \langle \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\mathbf{e}_\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \qquad \langle \mathbf{e}_\mathrm{x} \mid \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{1}{3},$$

$$\langle \mathbf{e}_\mathrm{x} \mid \mathbf{e}_2 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{e}_\mathrm{x} \mid \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{4}{3\sqrt{2}},$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{e}_\mathrm{x} = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\mathbf{e}_3.$$

Aufgabe 4

siehe Lösungen MfC2 Blatt2, Augabe 3 unter ravel.pctc.uni-kiel.de

Aufgabe 5

(a)

$$
\begin{aligned}
&|g\rangle, |h\rangle, |l\rangle \in V\\
&|k\rangle : k(x) = 5\sin^2(x) + 3 = \frac{5}{2}[1 - \cos(2x)] + 3 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}\cos(2x)\\
&\Rightarrow |k\rangle \notin V\\
&|m\rangle : m(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(0) + \sin(2x) = \sin(2x)\\
&\Rightarrow |m\rangle \in V
\end{aligned}
$$

(b) Nein, denn z.B. $|h\rangle = 2|g\rangle + 0.5|l\rangle$

(c)

$$
\begin{aligned}
&V \text{ wird aufgespannt von } \{p_1, p_2, p_3\}, \text{wobei}\\
&p_1(x) = 1, p_2(x) = \sin(x), p_3(x) = \sin(2x)\\
&\text{z.z.: } \{p_1, p_2, p_3\} \text{ linear unabhängig}\\
&\text{Sei } 0 = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)\\
&\;= \lambda_1 + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \sin(2x)\\
&x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0\\
&x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 0, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lambda_3 = 0\\
&\;\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\} \text{ linear unabhängig}\\
&\;\Rightarrow \{p_1, p_2, p_3\} \text{ Basis von } V\\
&g(x) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, h(x) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, l(x) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\\
&k \notin V,\, m(x) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(d) $\dim V = 3$

Aufgabe 6

a) (i)

$$
\langle \mathrm{P}_1 \,|\, \mathrm{P}_2 \rangle \;=\; \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_1(x)\mathrm{P}_2(x) \;=\; \langle \mathrm{P}_2 \,|\, \mathrm{P}_1 \rangle\,.
$$

(ii)

$$
\langle \lambda \mathrm{P}_1 \,|\, \mathrm{P}_2 \rangle \;=\; \int_0^1 \mathrm{d}x\, \lambda \mathrm{P}_1(x)\mathrm{P}_2(x) \;=\; \lambda\, \langle \mathrm{P}_1 \,|\, \mathrm{P}_2 \rangle\,.
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 \,|\, \mathrm{P}_3 \rangle &= \int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(\mathrm{P}_1(x) + \mathrm{P}_2(x)\right) \mathrm{P}_3(x), \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \; \mathrm{P}_1(x)\mathrm{P}_3(x) + \int_0^1 \mathrm{d}x \; \mathrm{P}_2(x)\mathrm{P}_3(x), \\
&= \langle \mathrm{P}_1 \,|\, \mathrm{P}_3 \rangle + \langle \mathrm{P}_2 \,|\, \mathrm{P}_3 \rangle \,.
\end{aligned}
$$

$(i\nu)$

$$
\langle \mathrm{P} \,|\, \mathrm{P} \rangle \;=\; \int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(\mathrm{P}(x)\right)^2 \;\geq\; 0.
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{P}\| &= \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(1 + x - 2x^2\right)^2}, \\
&= \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(1 + x^2 + 4x^4 + 2x - 4x^2 - 4x^3\right)}, \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + 1 - \frac{4}{3} - \frac{4}{4}\right)}, \\
&= \sqrt{\frac{4}{5}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}},
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{N}}(x) \;=\; \frac{\mathrm{P}(x)}{\|\mathrm{P}\|} \;=\; \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 + x - 2x^2\right).
$$

c)

$$
\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \langle \mathrm{P}_1 \,|\, \mathrm{P}_2 \rangle &= \int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(1 + sx\right)\left(2 + x\right), \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \;\left(2 + x + 2sx + sx^2\right), \\
&= 2 + \frac{1}{2} + s + \frac{1}{3}s \;=\; \frac{5}{2} + \frac{4}{3}s, \\
\Rightarrow \qquad s \;&=\; -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{15}{8}.
\end{aligned}
$$