Prof. Dr. D. Egorova

SoSe 2013
Blatt 3
24.04/8.05.2013

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 2

Lösungen

Aufgabe 1

(a)

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & 1 & 3 & 5 \\
 & & 2 & 4 & 6 \\
\hline
6 & 3 & 12 & 30 & 48 \\
5 & 2 & 9 & 23 & 37 \\
4 & 1 & 6 & 16 & 26
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & -2 & -1 & 1 \\
 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 5 \\
3 & 2 & -8 & -1 & 7 \\
1 & -1 & -1 & -2 & -1
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8}\exp(\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}) \\ 3\exp(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}) & \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2+2\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & 1+2\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\
 & & 3-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\
\hline
1 & -2+2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i}-4+8\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i}-6+2\mathrm{i} \\
-3\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 6-3\mathrm{i}+4+2\mathrm{i} & 9-3\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} -3+10\mathrm{i} & -5+5\mathrm{i} \\ 10-\mathrm{i} & 10 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 2

(a)

$$
\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},
$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A}, \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist nicht symmetrisch,}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{B}, \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist antisymmetrisch, aber nicht symmetrisch,}$$

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A}, \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist nicht hermitesch,}$$

$$\mathbf{B}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}, \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist hermitesch,}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist orthogonal und unitär,}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{E}_2 \neq \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist nicht orthogonal, aber unitär.}$$

(b)

$$\mathbf{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ -i & -i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{B}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\sigma_x\sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
\sigma_y\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x \\
&= \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = 2\mathrm{i}\sigma_z
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Es existieren **AB** und **DB**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i}\cos\alpha - \sin\alpha & 0 & \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \\
\mathbf{DB} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha & -1 & \cos\alpha + \sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Weiter existieren die Produkte:
AC, **BC**, **CD**, **DC**, **BB**.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
&A \text{ orthogonal } \Leftrightarrow A^T A = \mathbb{I}\\
&A^T A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c\\ b & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+b^2 & b+c\\ b+c & 1+c^2\end{pmatrix} = \mathbb{I}\\
&\Rightarrow \frac{1}{4}(1+b^2) = 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}\\
&\Rightarrow \frac{1}{4}(1+c^2) = 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}\\
&\Rightarrow b+c = 0 \Rightarrow b = -c\\
&\Rightarrow b = \sqrt{3} = -c \text{ oder } c = \sqrt{3} = -b\\
&\Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\\
&\text{oder } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Drehung um den Ursprung um den Winkel $\rho = \frac{2\pi}{3}$.
(a)

$$\begin{aligned}
c_3\mathbf{e}_1 &= c\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2 \\
c_3\mathbf{e}_1 &= -s\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2
\end{aligned}
\qquad \text{mit} \qquad
\begin{aligned}
c &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\\
s &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Repräsentationsmatrix ist } \mathbb{C}_3 = \begin{pmatrix} c & -s\\ s & c\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}_3^2 = \begin{pmatrix} c^2-s^2 & -2cs\\ 2cs & c^2-s^2\end{pmatrix}\\
&c^2 - s^2 = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = c\\
&cs = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}s\\
&\mathbb{C}_3^2 = \begin{pmatrix} c & s\\ -s & c\end{pmatrix} = \mathbb{C}_3^T\\
&\mathbb{C}_3^T\mathbb{C}_3 = \begin{pmatrix} c & s\\ -s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -s\\ s & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2+s^2 & 0\\ 0 & c^2+s^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\mathbb{C}_3 \text{ ist orthogonale Matrix (Drehung)}
\end{aligned}$$

(c) Spiegelung an der x-Achse: $\sigma_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\sigma_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$.

$$\Rightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Spiegelund an der Geraden vom Ursprung zum Punkt P_2 - anhand einer Skizze erkennt man: $\sigma_2\mathbf{e}_1 = c\mathbf{e}_1 + (-s)\mathbf{e}_2$, $\sigma_2\mathbf{e}_2 = (-s)\mathbf{e}_1 + (-c)\mathbf{e}_2$.

$$\Rightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} c & -s \\ -s & -c \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \mathbb{C}_3 \\
\sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \mathbb{C}_3^2\mathbb{C}_3^T \\
\sigma_2^2 &= E_2
\end{aligned}$$