Prof. Dr. D. Egorova

SoSe 2013
Blatt 4
ab 15.5.2013

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 2

Lösungen

Determinanten
Aufgabe 1
(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 10 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(c)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^4 - 3x^2 + 1$$

Aufgabe 2
(a)

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \\ 16 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right\} = \det \left\{ \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(Zeilensubtraktion II – I, III – } 2 \times \text{I)}$$

$$= 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 48$$

(b)

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ t & 2t & 0 \\ 3a & a & a^2 \end{pmatrix} \right\} = t \cdot a \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \right\}$$

$$= t \cdot a \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & a-6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(Zeilensubtraktion II – I, III – } 3 \times \text{I)}$$

$$= t \cdot a \cdot \det \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-10 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(Zeilensubtraktion III – } 2 \times \text{II)}$$

$$= t \cdot a \cdot (a-10) \quad \text{(Dreiecksmatrix)}$$

(c)

$$\det\left\{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&3&3&2\\2&4&4&2\\5&2&10&2\end{pmatrix}\right\} = \det\left\{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&4&4&2\\2&4&4&2\\5&2&10&2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{(Zeilenaddition II + I)}$$
$$= 0 \qquad \text{(Zeilen II und III linear abhängig)}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
&\det\{A\} = 2\\
&\det\{A^2\} = \det\{A\}\,\cdot\,\det\{A\} = 4\\
&\det\{A^T A^2\} = \det\{A^T\}\,\cdot\,\det\{A^2\} = \det\{A^3\} = 8\\
&\det\{(A^T)^{-1}\,A^3\,(A^T)^2\} = \frac{1}{\det\{A^T\}}(\det\{A\})^3(\det\{A^T\})^2 = (\det\{A\})^4 = 16
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Matrix B ist invertierbar (regulär), wenn $\det B \neq 0$.

$$\det B = \det\begin{pmatrix}\alpha&1&2\\\alpha&\alpha&3\\\alpha&1&0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha&1&2\\0&\alpha-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix} \quad \text{(Zeilensubtraktion II − I, III − I)}$$
$$= \alpha(\alpha-1)(-2)$$

$\Rightarrow B$ invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

LGS

Aufgabe 5

(a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-2&1&1\\-2&-1&0&t-3\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-4\\3\\t\end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & t-3 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & t-5 & t+4 \end{array}\right) \text{(II+I, III-2} \cdot \text{I, IV+2} \cdot \text{I)}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & t-4 & t+2 \end{array}\right) \text{(III+2} \cdot \text{II, IV+II)}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t-1 \end{array}\right) \text{(III/5, IV+3} \cdot \text{III)}$$

(b) Homogenes LGS: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
Nichttriviale Lösungen existieren, falls $\mathbf{A}$ nicht regulär,
d.h. $\det\{\mathbf{A}\} = 0$.

$$0 = \det\{\mathbf{A}\} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (t-1)$$

$\Rightarrow$ Nichttriviale Lösung nur für $t = 1$. Bestimmung der Lösung des homogenen LGS für $t = 1$: Umformung der Koeffizientenmatrix wie in (a).

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}, x_3 = \lambda, x_2 = 0, x_1 = -\lambda$

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ ist die Lösungsmenge.}$$

(c) Das inhomogene LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn das zugehörige homogene LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung besitzt, also (siehe b) für all $t \neq 1$.
Bestimmung der Lösung für $t \neq 1$:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t-1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_4 = 1, x_3 = 2, x_2 = -1, x_1 = -1$

$$\text{Lösung des inhomogenen LGS: } X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Das inhomogene LGS ist auch für $t = 1$ lösbar. Lösungsmenge:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_4 = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}, x_3 = \lambda + 1, x_2 = -2 - \lambda + (\lambda + 1) = -1, x_1 = 2 + \lambda - 2(\lambda + 1) = -\lambda$

$$\Rightarrow \text{ Lösungsmenge: } X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

(e) $t \neq 1$: Lösungsmenge des inhomogenen LGS ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{inhomogenes LGS}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{homogenes LGS}} \right\}$$

$t = 1$: Lösungsmenge des inhomogenen LGS ist

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{inhomogenes LGS}} + \underbrace{\left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{homogenes LGS}}$$

Aufgabe 6

(a)

$\det\{A\} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -11 - 2 \cdot (-5) = -1 \Rightarrow$ invertierbar.

Die inverse Matrix A^{-1} ist gegeben als Lösung der Matrixgleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{E_2} \rightarrow \mathbf{E_2X} = \mathbf{A}^{-1}$.

Die Lösung erhält man durch das Gauß-Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ B ist nicht invertierbar.

(b)

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{\mathrm{III}-4\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}/(-5)}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}/(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+11\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwertproblem

Aufgabe 8

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Eigenwerte:

$$0 = \det\{\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}_3\} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
(b) $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = 0$
(c)

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Aufgabe 9
(a) Eigenwerte:

$$0 = \det\{\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}_3\} = \det\left\{ \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right\} = -\lambda^3 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}$$

(b) Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{D},\ \text{Eigenvektor zum EW 0}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \gamma = \exp(\mathrm{i}x), x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i} \text{ Löse LGS } (M - \lambda_{2,3}\mathbf{E}_3)\mathbf{v}_{2,3} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mp\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mp\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mp\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{2,3} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \exp(\mathrm{i}x), x \in \mathbb{R}$$

(c)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^+\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 \ \surd$$

(d)

$$\mathbf{U}^+\mathbf{M}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D} \ \surd$$

Aufgabe 10
(a)

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - 4) \\ &\Rightarrow \text{Eigenwerte } \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 0, \quad \lambda_4 = -2 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen der Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 2:$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{2,3} = 0:$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_{2,3} = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} v_2 + v_4 = 0 \\ v_1 + v_3 = 0 \end{array}$$

$$i.\ \text{Wähle } v_1 = \lambda \in \mathbb{R}, v_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$ii.\ \text{Wähle } v_0 =, v_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 2:$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_4 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_4 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die so konstruierten Eigenvektoren sind bereits orthogonal. Falls man aber z.B. in i) wählt $v_1 = v_2 = \lambda$, so erhält man nicht-orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{v}_{2/3}$, die man mittels Gram-Schmidt orthonormieren muss.
Normierung der Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_1' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) $\operatorname{tr} \mathbf{M} = 0 = 2 + 2 \cdot 0 + (-2),\ \det \mathbf{M} = 0 = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot (-2)$.