Prof. Dr. D. Egorova

SoSe 2010
Blatt 5
19.5.2010

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 2

Lösungen

1. $f(x,y) = (xy, -y^2)$

   (a)

$$
\begin{aligned}
C(t) &= (\sin t, \cos t) \\
\dot{C}(t) &= (\cos t, -\sin t) \\
\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\pi/2} \left\langle \mathbf{f}(C(t)) \middle| \dot{C}(t) \right\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} [\sin t \cos t \cos t - \cos^2 t(-\sin t)] \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^1 z^2 dz \quad (z = \cos t) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
C(t) &= (2t, \sqrt{1-4t^2}) \\
&\Rightarrow C_x^2 + C_y^2 = 1 \\
&\Rightarrow \text{ Selbe Kurve wie (a), nur andere Parameterisierung.} \\
\dot{C}(t) &= \left(2, \frac{-4t}{\sqrt{1-4t^2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\langle \mathbf{f}(C(t)) \middle| \dot{C}(t) \right\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2t \cdot \sqrt{1-4t^2} \cdot 2 - (1-4t^2) \frac{-4t}{\sqrt{1-4t^2}} \right] \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 8t \cdot \sqrt{1-4t^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1} u^{\frac{1}{2}} du \quad (u = 1-4t^2) \\
&= \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow \text{ Integral unabhängig von Parameterisierung.}
\end{aligned}
$$

(c) Direkte Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$

$$
\begin{aligned}
C(t) &= (t, 1-t); \quad 0 \le t \le 1 \\
\dot{C}(t) &= (1, -1) \\
\int_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} &= \int_0^1 [t(1-t) - (1-t)^2 \cdot (-1)] \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(d) Offensichtlich hängt das Wegintegral von der Kurve C ab. $\Rightarrow$ Es existiert keiner Stammfunktion $g(x, y)$, die

$$
\frac{\partial g}{\partial x} = xy \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y} = y^2
$$

erfüllt.

2. (a) C ist eine Schraubenlinie mit Radius r_0 und Höhe h.

$$
C(t) = (r_0 \cos t, r_0 \sin t, \frac{ht}{2\pi})
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= (-r_0 \sin t, r_0 \cos t, \frac{h}{2\pi}) \\
\text{Bogenlänge } &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{\left\langle \dot{C} \middle| \dot{C} \right\rangle} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{r_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 4\pi \sqrt{r_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\
\text{wegen } \dot{C} = \frac{\partial C}{\partial t} &= \left(-r_0 \sin t, r_0 \cos t, \frac{h}{2\pi} \right).
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
g(x, y, z) &= z^2 \\
\int_C g \, \mathrm{d}s &= \int_{-2\pi}^{2\pi} g(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left\langle \dot{C} \middle| \dot{C} \right\rangle} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{ht}{2\pi} \right)^2 \sqrt{r_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{h^2}{4\pi} \sqrt{r_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{1}{3} \left[t^3 \right]_{-2\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{4}{3} \pi h^2 \sqrt{r_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}
\end{aligned}
$$

3. (a) Es muss gelten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_3} &= \frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_{x_3}}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

Oder $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$

Alle partiellen Ableitungen sind $= 1$, also existiert Potential

(b)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{\mathbf{x}_0}(t) &= t\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} \\
\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{x}_0}(t) &= \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 \\
\int_0^1 \mathbf{f}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{x}_0}(t))\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{x}_0}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t\begin{pmatrix} x_{02}+x_{03} \\ x_{01}+x_{03} \\ x_{01}+x_{02} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \,\cdot\, 2(x_{01}x_{02}+x_{01}x_{03}+x_{02}x_{03}) \\
&= x_{01}x_{02}+x_{01}x_{03}+x_{02}x_{03} \\
\Rightarrow \varphi(x_0) &= x_{01}x_{02}+x_{01}x_{03}+x_{02}x_{03}+C
\end{aligned}
$$

(c) Geschlossener Weg, Stammfunktion existiert $\rightarrow$ Kurvenintegral $=$ Null.

(d)

$$
\begin{aligned}
W &= -\int_{\boldsymbol{C}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} \\
&= -(\varphi(\mathbf{P}_2)-\varphi(\mathbf{P}_1)) \\
&= -(2-3) \\
&= 1
\end{aligned}
$$