Prof. Dr. D. Egorova

SoSe 2013
Blatt 2
ab 24.4.2013

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Chemiker 2

Ankündigungen

Übungsblätter & Aktuelles: `http://theochem.pctc.uni-kiel.de/`
Vorlesungsskript: `http://ravel.pctc.uni-kiel.de/`

(*)-Aufgaben sind keine Pflichtaufgaben. Sie dienen als freiwillige Zusatz- bzw. Hausaufgaben (Korrektur auf Wunsch möglich) und können nach Vereinbarung mit den Assistenten in der Übung bzw. in der Zusatzübung besprochen werden.

Übungen

Vektorräume (Fortsetzung)

1. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

   Drücken Sie $\vec{u}$ als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ aus.

2. Es sei $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$ auch $\{\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$ ist.

3. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (*) Zeigen Sie, dass diese eine Basis in $\mathbb{R}^3$ bilden.

   (b) Konstruieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren aus der Basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine orthonormierte Basis.

   (c) Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser orthonormierten Basis an.

4. (*) Bilden Sie nach Gram-Schmidt aus den folgenden Vektoren ein Orthonormalsystem:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Demonstrieren Sie, dass die resultierenden Vektoren tatsächlich auf eins normiert und paarweise aufeinander orthogonal sind.

5. Gegeben sei die Menge der Funktionen

$$V = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; f(x) = c_1 + c_2 \sin(x) + c_3 \sin(2x); c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

   Mit der punktweisen Addition von Funktionen $((f+g)(x) = f(x)+g(x))$ und der skalaren Multiplikation $((cf)(x) = cf(x), c \in \mathbb{R})$ bildet diese Menge einen Vektorraum.

   (a) Welche der folgenden Funktionen sind Elemente von V?

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ h(x) &= 2 + \sin(x) \\ l(x) &= 2\sin(x) \\ k(x) &= 5\sin^2(x) + 3 \\ m(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

   (b) Sind die Funktionen $\{g, h, l\}$ linear unabhängig?

   (c) Geben Sie eine Basis von V an und bestimmen Sie die Komponenten von $|g\rangle, |h\rangle$ und $|l\rangle$ in dieser Basis.

   (d) Welche Dimension hat der Vektorraum V?

6. Der Vektorraum der Polynome n-ten Grades auf dem Intervall $[0, 1]$ ist definiert durch:

$$\Pi_n = \left\{ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : \; a_k \in \mathbb{R}, x \in [0, 1] \right\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass durch $\langle P_1 | P_2 \rangle := \int_0^1 \mathrm{d}x P_1(x) P_2(x)$ für $P_1, P_2 \in \Pi_n$ ein Skalarprodukt auf Π_n definiert wird.

   (b) Wie sie wissen gilt, dass $||P|| := \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x |P(x)|^2}$ eine Norm im Vektorraum Π_n ist. Gegeben sei das Polynom $P(x) = 1 + x - 2x^2$. Normieren Sie das Polynom.

   (c) Gegeben seien die Polynome $P_1(x) = 1 + sx$, $P_2(x) = 2 + x$. Für welche Werte $s \in \mathbb{R}$ sind P_1 und P_2 orthogonal im Sinne des oben angegebenen Skalarprodukts?